I.

Mathematik.

Betrachtungen über die Methode der kleinsten Quadrate.

Prolegomena aller tiefern mathematischen Naturforschung.

Von Dr. Nürnberger.

Wenn eine Kunst, eine Wissenschaft oder auch nur eine Erfindung irgend einer Art fast auf Einmal den höchsten Gipfel der Vollkommenheit erreicht, so ist Nichts interessanter, als den geheimen Ursachen dieses überraschenden Erfolges nachzuspüren. Die beobachtende Astronomie, in ihren neuesten Fortschritten, stellt ein Beispiel solcher schnellen Ausbildung dar; und da das Verfahren der kleinsten Quadrate, angewendet auf die Bedingungsgleichungen Behufs gleichzeitiger Correction aller Elemente, welches unter den Mitteln jener schnellen Vervollkommnung einen der ersten Plätze einnimmt, ähnliche Anwendung auf das ganze Gebiet der Naturforschung, oder vielmehr auf alle diejenigen Fälle leidet, wo aus einer größeren Zahl von Beobachtungen, deren Resultat in Gleichungen gebracht ist, auf die Gesetze des Vorganges als die Unbekannten dieser Gleichungen geschlossen werden soll: so erscheint es angemessen, gegenwärtige, der ernsteren Naturforschung gewidmete Schrift durch eine möglichst allgemeinfaßliche Darstellung dieser vortrefflichen Methode zu eröffnen.

Man muß sich, um eine deutliche Einsicht von diesem, allerdings nicht leichten Rechnungsverfahren zu erlangen, sogleich an das allgemeine Verhältniß erinnern, welches zwischen einer Anzahl unbekannter Größen und den zu ihrer Bestimmung gegebenen Gleichungen bestehen kann: entweder nehmlich sind, erstens weniger, oder zweitens eben so viel, oder endlich drittens mehr Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden. Im ersteren Falle ist das Problem unbestimmt, im zweiten bestimmt, im dritten mehr als bestimmt. Sind aber in diesem letztern Falle, mit dem wir es, unter der gleich folgenden Einschränkung, hier allein zu thun haben, die Gleichungen das Resultat von Beobachtungen; so muß es sich, da diese Beobachtungen doch nur äußerst selten ganz oder gleich scharf ausfallen können, fast immer ereignen, daß die daraus formirten, und also auch nicht ganz übereinstimmenden Gleichungen, bei verschiedener Anwendung oder Verbindung, auch immer andere Werthe für die Unbekannten liefern: und das Verfahren nun, durch eine eigenthümliche Behandlungs- und Verbindungsweise dieser sämmtlichen, zwar nicht vollkommenes, aber doch gleiches, großes Zutrauen verdienenden Gleichungen solche Mittelwerthe für die Unbekannten zu finden, durch deren nachherige Substitution in die Gleichungen, der Gesammtheit derselben näher Genüge gethan wird, als auf jedem andern Wege, so daß der, bei der Zusammenzählung verbleibende Rest des Ungetilgten, abgesehen von den Vorzeichen, ein Kleinstes (im Sinne der Differentialrechnung) sey, heißt, aus nachher zu entwickelnden Gründen, die Methode der kleinsten Quadrate.

Gesetzt, um dieses durch ein möglichst übersichtlich gewähltes Beispiel anschaulich zu machen, man habe aus Beobachtungen des vereinigten Ergebnisses zweier, dem Werthe ihrer respectiven Einflüsse nach unbekannten Größen, wie ein solcher Fall aus der beobachtenden Astronomie zur Erläuterung unten beigebracht werden wird, die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ 2x + y &= 7, \\ x + 3y &= 12, \end{aligned}$$

gefunden, und ihnen die Gestalt

$$\begin{aligned} x + y - 4 &= 0, \\ 2x + y - 7 &= 0, \\ x + 3y - 12 &= 0, \end{aligned}$$

gegeben; so kömmt es nunmehr darauf an, für x und y auch wirklich solche numerische Werthe auszumitteln, durch deren Substitution die Gleichungen entweder ganz, oder, wenn dieß wegen ihrer nicht vollkommnen Concordanz unausführbar ist, doch wenigstens in der Gesammtheit so nahe als möglich auf 0 gebracht werden.

Zu dem Ende stelle man sich das Problem als bereits gelöst vor, so würde also offenbar die Summe der, nach der Substitution noch übrig bleibenden Differenzen, die wir mit D, D', und D'' bezeichnen wollen, daß also

$$\begin{aligned} x + y - 4 &= D, \\ 2x + y - 7 &= D', \\ x + 3y - 12 &= D'', \end{aligned}$$

käme, ein Kleinstes seyn müssen. Allein, da man hierbei doch noch nicht weiß, ob nicht einige von diesen Differenzen negativ seyn könnten, während andere positiv wären, woraus eine bloße Compensation in der Summe, statt größtmöglicher Verkleinerung des Real-Betrages entstehen würde, so muß man ferner auch Alles erst noch positiv machen, welches bekanntlich erlangt wird, indem man jede einzelne Differenz auf irgend eine gerade Potenz erhebt. Hierzu wählt man als die simpelste und bequemste zur Berechnung, das Quadrat, und von diesem Umstande führt das Verfahren seinen Namen: der Methode der kleinsten Quadrate.

Es müßte also, um zur Bestimmung der geforderten passendsten Werthe für x und y zu gelangen, die Summe $D^2 + D'^2 + D''^2$, d. h. der derselben gleiche Betrag

$$(x+y-4)^2 + (2x+y-7)^2 + (x+3y-12)^2$$

ein Kleinstes seyn, und vorstehender Rechnungsausdruck nach Maßgabe dieser Bedingung behandelt werden. Die Differentialrechnung in der Methode de maximis et minimis schreibt dazu bekanntlich vor: den Ausdruck successiv in Bezug auf eine der Unbekannten nach der andern, zu differentiiren, und ein jedes der solchergestalt erhaltenen Differentiale $= 0$ zu setzen, wodurch also so viel Gleichungen als Unbekannte erhalten werden, welche letztere Gleichungen hiernächst ferner nach dem gewöhnlichen Eliminations-Verfahren zu behandeln sind. Wendet man diese Vorschrift auf den obigen Ausdruck an, so werden also die beiden Gleichungen

$$2(x+y-4)dx + 2(2x+y-7)2dx + 2(x+3y-12)dx = 0,$$
$$2(x+y-4)dy + 2(2x+y-7)dy + 2(x+3y-12)3dy = 0,$$

und nach der Reduction:

$$6x + 6y - 30 = 0$$
$$6x + 11y - 47 = 0$$

erhalten, woraus, auf den ersten Blick, $x = 1\frac{3}{5}$, und $y = 3\frac{2}{5}$ folgt. Das Darstellungs-Gesetz dieser Gleichungen läßt sich, wie man sieht, auch durch die Vorschrift ausdrücken: alle Glieder jeder der ursprünglichen Gleichungen successiv durch den Coefficienten der betreffenden Unbekannten in ihr, mit seinem Zeichen genommen, zu multipliciren, die Summen der Producte zu machen, und jede dieser Summen $= 0$ zu setzen.

Substituirt man hiernächst die solchergestalt gefundenen Werthe von $x = 1\frac{3}{5}$ und $y = 3\frac{2}{5}$, in die ursprünglichen drei Gleichungen: so kömmt

$$x + y - 4 = + 1,$$
$$2x + y - 7 = - \tfrac{2}{5},$$
$$x + 3y - 12 = - \tfrac{1}{5},$$

daß also der ganze ungetilgte Rest $= 1\frac{3}{5}$ beträgt, wobei, wie sich nach dem Geiste der Methode nunmehr von selbst versteht, die Vorzeichen unbeachtet bleiben; — und es handelt sich jetzt nur noch darum, auch augenscheinlich zu zeigen, daß keine anderweite, die Gesammtheit der Gleichungen umfassende Verbindung ein näheres Resultat, sowohl für das Ganze als Einzelne, gebe.

Zur Erhaltung einer solchen anderweiten Verbindung Behufs eines arithmetischen Mittels aber, müßte man im vorliegenden Falle alle Combinationen der drei Gleichungen zwei zu zwei machen, die daraus fließenden resp. Werthe der Unbekannten summiren, und diese Summen durch die Zahl der Combinationen, hier also durch 3, dividiren. Nun folgt aus Verbindung der drei Gleichungen, und zwar

von 1 und 2, $x = 3$, $y = 1$,
1 und 3, $x = 0$, $y = 4$,
2 und 3, $x = 1\frac{4}{5}$, $y = 3\frac{2}{5}$,

und also im Durchschitt $x = 1\frac{3}{5}$, $y = 2\frac{4}{5}$ *);

Die Substitution dieser neuen Werthe aber würde

$$x + y - 4 = + \tfrac{2}{5},$$
$$2x + y - 7 = - 1,$$
$$x + 3y - 12 = - 2,$$ und also

die Summe des Ungetilgten $= 3\frac{2}{5}$, (abermals abgesehen von den Zeichen), um $1\frac{4}{5}$ größer als oben, geben.

Es ist also durch den Augenschein dargethan, daß die Methode der kleinsten Quadrate zu dem möglichst nächsten Resultate führt; und ein ferneres geringes Nachdenken über das vor ihr befolgte Verfahren zeigt außerdem, daß sie bei Erwirkung des Gesammtresultates, zugleich jeder einzelnen Gleichung, ohne eine vor der andern zu begünstigen, das, unter dieser Bedingung zuläßige nächste Genüge leistet, worauf es, bei der oben vorausgesetzten Natur dieser Gleichungen eben ankam. Wäre endlich nur von einer einzigen Unbekannten x die Rede, für welche man mehrere

*) Der Umstand, daß die Werthe von x in diesem einzelnen Falle, bei beiden Verfahrungsarten gleich gerathen, ist zufällig; man sieht aber daraus zugleich, daß er vorkommen kann, und d. Vf. hat das gewählte Beispiel eben deswegen mehreren andern vorgezogen. Noch mehr: es ist sehr denkbar, daß Fälle eintreten können, wo das letztere Verfahren überhaupt dieselben Resultate giebt, als die Methode der kleinsten Quadrate; nur kann dasselbe, abgesehen von der Zufälligkeit dieses Erfolges, nie der Gesammtheit der Gleichungen ein näheres Genüge thun.

verschiedene Werthe a, a', a'' u. s. w. gefunden hätte, aus denen also das arithmetische Mittel genommen werden muß; so zeigt Legendre in den Nouvelles méthodes pour la déterminat. des orbites des comètes. Paris 1806. S. 75., daß dieses alsdann nothwendige, genaueste Verfahren nicht weniger mit der Vorschrift unserer Methode übereinstimmt, indem die alsdann entstehenden Ausdrücke, $(a - x)^2$ $(a' - x)^2$, $(a'' - x)^2$ für das Minimum die Gleichung $(a - x) + (a' - x) + (a'' - x) = 0$, und also

$$x = \frac{a + a' + a''}{n}$$ geben.

Um aber hiernächst, wie Eingangs bevorantwortet worden ist, einen Fall aus der Wirklichkeit, und zwar aus der beobachtenden Astronomie, anzuführen, an welchem die ganze practische Wichtigkeit dieser vortrefflichen Methode erkannt werden mag; so denke man sich, daß Verschiedenheiten zwischen den Tafelorten und den beobachteten eines Himmelskörpers bemerkt worden wären, welche auf Ungenauigkeiten in den Elementen jener Tafeln schließen ließen, und daß diese Verschiedenheiten in einem Punkte der Bahn $= v$, in einem zweiten $= v'$, und in einem dritten endlich $= v''$ seyen. Man will daraus die Elemente berichtigen, weiß aber noch nicht, ob nur bei einem, oder ob bei allen, und um wie viel bei einem jeden gefehlt sey. Man nimmt also eine unbekannte Größe x, um welche bei dem ersten Elemente, und eine solche y an, um welche bey dem zweiten Elemente, dabei stehen zu bleiben, gefehlt seyn könnte; bekannt ist aber schon, daß 1 Minute Werthsveränderung jedes Elementes im ersten Punkte der Bahn, einen Einfluß $= a$, herrührend vom ersten, und $= b$, herrührend vom zweiten Elemente, hervorbringt; im zweiten Puncte seyen diese Einflüsse a' und b', und im dritten endlich a'' und b'': so geben dagegen resp. x und y Veränderung resp. ax und by Einfluß auf den ersten, $a'x$ und $b'y$ auf den zweiten, und $a''x$ und $b''y$ auf den dritten Punct der Bahn, in welchen, als vereinigtes Resultat dieser Einflüsse, die resp. Verschiedenheiten v, v' und v'' beobachtet worden sind. Man hat also offenbar die drei Gleichungen:

$$ax + by = v,$$
$$a'x + b'y = v', \text{ und}$$
$$a''x + b''y = v'',$$

welche, nachdem man ihnen die Form:

$$ax + by - v = 0,$$
$$a'x + b'y - v' = 0, \text{ und}$$
$$a''x + b''y - v'' = 0,$$

gegeben hat, genau mit unserm obigen numerischen Beispiele übereinstimmen, und genau eben so behandelt werden müssen, um die verlangte gleichzeitige Correction der Elemente in solcher Art zu bewirken, daß dabei keines derselben stärker als ein anderes afficirt, und die Werthveränderung für ein jedes also in diejenigen möglichst engsten Grenzen eingeschlossen werde, welche sich zugleich mit der möglichst weit getriebenen Annullirung der betreffenden Gleichungen im Ganzen und Einzelnen nur irgend vertragen.

Man begreift, daß diese Methode in solcher Weise, statt zweier Elemente, auf welche wir uns der Uebersichtlichkeit wegen oben beschränkt hatten, auf alle Elemente, gleichwie auf alle ähnliche Fragen angewendet werden kann, und daß sie, wahrscheinlicherweise, ein um so genaueres Resultat gewähren muß, jemehr möglichst genaue Bedingungsgleichungen man ihr auf Einmal unterwirft. —

Die Erfindung dieses, dem menschlichen Geiste zur großen Ehre gereichenden schweren Rechnungsverfahrens, darf fast gleichzeitig einem Deutschen und einem Franzosen, unserem vortrefflichen Gauß, und dem Verfasser der schon oben erwähnten Schrift: Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris. 1806. 4. Legendre, beigemessen werden. Gauß verbreitet sich ausführlich darüber in der Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburgi. 1809. 4. S. 205 sq. jedoch (S. 221 gedachten Werkes) selbst einräumend: „Ceterum principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. Legendre in opere Nouvelles méthodes p. p. prolatum est, ubi plures aliæ proprietates hujus principii expositae sunt“ (wie wir oben eine solche Eigenthümlichkeit hervorgehoben haben). Späterhin hat er noch eine eigene Schrift: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ. Gœttingæ. 1823. 4. darüber an das Licht treten lassen. Außerdem besitzt man eine gehaltreiche dießfalsige Abhandlung von Paucker: Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Mitau. 1819. 4. welche von Muncke im betreffenden Artickel des neuen physicalischen Lexikons. Leipzig. 1825. B. 1. S. 902 sq. benutzt worden ist. Vortrefflich sind ferner die Betrachtungen, welche Laplace im Essai philosophique sur les probabilités. 4te Auflag. Paris 1819. 8. S. 94 sqq. darüber anstellt. Außerdem verdienen besondere Beachtung die Darstellungen von Biot: Traité d'Astronomie physique. 2te

Aufl. Paris 1811. 8. B. 2. S. 203 sq. und von Piazzi: Astronomie. Deutsch von Westphal. Berlin 1822. 8. B. 2. S. 127 sq. Populär habe ich den Gegenstand zuerst behandelt, im Tübinger Literat. Blatte No. 72 für 1820; und der gegenwärtigen Abhandlung endlich möchte der Vorzug gebühren, zuerst gezeigt zu haben, daß es allerdings möglich ist, auf einem andern Wege zu den nehmlichen Resultaten wie vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate, wenn gleich nie zu näheren, zu gelangen.